3. FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

INDICE

3.1. Definición de función vectorial de una variable real, dominio y graficación…….2
3.2. Límites y continuidad……………………………………………………………………………..3
3.3. Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades…………………………………..3
3.4. Integración de funciones vectoriales…………………………………………………………….4
3.5. Longitud de arco…………………………………………………………………………………………..5
3.6. Vector tangente, normal y binormal…………………………………………………………….6
3.7. Curvatura……………………………………………………………………………………………………..6
3.8. Aplicaciones…………………………………………………………………………………………………….7

3. FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

3.1. Definición de función vectorial de una variable real, dominio y graficación.

Una función vectorial es una función que transforma un número real en un vector:

$$F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad \text{definida como}\quad F(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

Donde *x*(*t*), *y*(*t*) y *z*(*t*) son funciones llamadas funciones componentes de variable real del parámetro t.
Así, se dice que *F* es continua, derivable o integrable, si lo son *x*(*t*), *y*(*t*) y *z*(*t*).
La función vectorial también se puede encontrar representada como $\vec{f}(t)$.

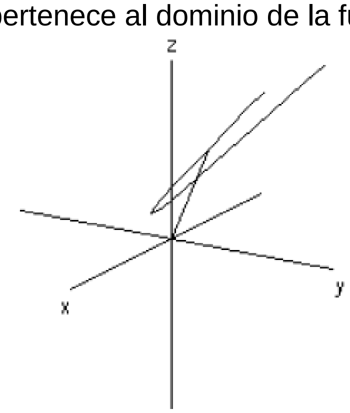
Por tanto, se llama función vectorial a cualquier función de la forma:

$$r(t)=\big(f(t),g(t)\big)\ \ldots\ldots\ldots.Plano$$
$$r(t)=\big(f(t),g(t),h(t)\big)\ \ldots.Espacio$$

DOMINIO
El dominio de una función vectorial está dado por la intersección de los dominios de cada una de las funciones componentes, es decir:

$$Si\ \vec{f}(t)=\big(f_1(t),f_2(t),f_3(t)\ldots\ldots f_n(t)\big)\ \ es\ \ D\vec{f}=D\vec{f_1}\cap D\vec{f_2}\cap D\vec{f_3}\cap\ldots\ldots..D\vec{f_n}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA
La representación grafica de una función vectorial es aquella curva C que describen los puntos finales de los vectores que forman parte de la función para toda t que pertenece al dominio de la función.



Un punto de la curva C tiene la representación cartesiana (x,y,z) donde:

$$x=f_1(t)\quad y=f_2(t)\quad z=f_3(t)$$

Las cuales se llaman ecuaciones parametricas de C. Al asignar números reales a t se elimina el parámetro y se obtienen ecuaciones cartesianas de C.

3.2. Límites y continuidad.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Dada una función vectorial $\vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t)$

$$\lim_{t\to a} \vec{F}(t) = \left(\lim_{t\to a} x(t), \lim_{t\to a} y(t), \lim_{t\to a} z(t)\right) = \vec{\ell}$$

Esto significa que cuando t tiende al valor de a, el vector $\vec{F}(t)$ se acerca más y más al vector $\vec{\ell}$. Para que exista el límite de la función, debe existir el límite de cada una de las funciones componentes.

CONTINUIDAD

Sea $\vec{F}(t): A \to \mathbb{R}^n \;\; y \;\; a \;\; un\ punto\ de\ acumulacion\ de\ A \subseteq \mathbb{R}.\ Análogamente\ a\ la\ definición\ utilizada\ para\ funciones\ escalares\ diremos\ que\ \vec{F}(t)$ es continua en a sí y sólo si:

- Existe el vector $\vec{F}(a)$
- Existe el $\lim_{t\to a} \vec{F}(t)$
- $\lim_{t\to a} \vec{F}(t) = \vec{F}(a)$

Teorema: Una función con valores vectoriales *r*(*t*) es continua en *t* = *a* si y sólo si sus funciones componentes *f* ,*g* y *h* son continuas en *t* = *a*.

3.3. Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades.

Sea la función vectorial $\vec{F}(t)$ entonces diremos que $\vec{F}'(t)$ es la derivada de dicha función y se define mediante:

$$\vec{F}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

Para valores cualesquiera de t para los que existe el límite. Cuando el límite existe para t = a se dice que $\vec{F}(t)$ es derivable en t = a.

Teorema Sea $\vec{F}(t)$ una función vectorial y supongamos que sus funciones componentes *f* ,*g* y *h* son todas derivables para algún valor de *t*, entonces $\vec{F}(t)$ es derivable en ese valor de *t* y su derivada está dada por:

$$\vec{F}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

PROPIEDADES

Supongamos que *r*(*t*) y *s*(*t*) son funciones vectoriales derivables, que *f*(*t*) es una función escalar también derivable y que *c* es un escalar cualquiera, entonces:

1. **Adición y Sustracción**

   $\frac{d}{dt}[r(t) \pm s(t)] = r'(t) \pm s'(t)$

2. **Producto por un Escalar**
$\frac{d}{dt} c\, r(t) = c\, r'(t)$

3. **Producto por una Función Escalar**
$\frac{d}{dt}[f(t)\, r(t)] = f'(t)\, r(t) + f(t)\, r'(t)$

4. **Producto Escalar**
$\frac{d}{dt}[r(t) \cdot s(t)] = r'(t) \cdot s(t) + r(t) \cdot s'(t)$

5. **Producto Vectorial**
$\frac{d}{dt}[r(t) \times s(t)] = r'(t) \times s(t) + r(t) \times s'(t)$

Teorema $\|r_{(t)}\|$ es constante si y solo si $r(t)$ y $r'(t)$ son ortogonales para todo t.

Cuando una función vectorial definida en un intervalo abierto de R es derivable indefinidamente y su primera derivada no es nula, decimos que se trata de una curva regular. Al vector $\vec{F}(t)$ se le llama vector de posición de la curva y a los vectores $\vec{F}'(t)$ y $\vec{F}''(t)$ se les llama, respectivamente, vectores velocidad y aceleración. De modo que la rapidez en un instante t es $\left|\vec{F}'(t)\right|$, es importante observar que la rapidez es un escalar, mientras que la velocidad un vector. Al vector $\vec{F}'(t)$ también se le llama vector tangente a la curva $\vec{F}(t)$ en t, y el vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{F}'(t)}{|\vec{F}'(t)|}, \quad es\ el\ vector\ tangente\ unitario$$

3.4. Integración de funciones vectoriales.

La función vectorial $\vec{F}(t)$ es una antiderivada de la función vectorial $\vec{f}(t)$, siempre y cuando

$$\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Si $\vec{F}(t)$ es cualquier antiderivada de $\vec{f}(t)$, la integral indefinida de esta se define como

$$\int \vec{f}(t)\, dt = \vec{F}(t) + c$$

Donde c es un vector constante arbitrario.

INTEGRAL DEFINIDA

Para la función vectorial $\vec{f}(t)$, se define la integral definida de la misma

$$\int_a^b \vec{f}(t)\, dt = \int_a^b (f(t), g(t), h(t))\, dt = \left[\int_a^b f(t)\, dt, \int_a^b g(t)\, dt, \int_a^b h(t)\, dt\right]$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL (Regla de Barrow)
Supongamos que $\vec{F}(t)$ es una antiderivada de $\vec{f}(t)$ en el intervalo [a,b] diremos:

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

3.5. Longitud de arco

Teorema. Si C es la gráfica de un función F en un intervalo [a,b] y si F' es continua en dicho intervalo, entonces C tiene una longitud L y

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [F^{'}(x)]}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

Ejemplo:
Encuentre la longitud de la parte de la parábola con ecuación $y = 4 - x^2$ que está en la parte superior del eje x.
Solución:
La curva que se desea determinar es la grafica de

$$F = \{(x,y)|\ y = 4 - x^2, x \in [-2,2]\}$$

Como $F(x) = 4 - x^2, F^{'}(x) = -2x$, vemos que F' es continua en [-2,2]; por tanto se puede aplicar el teorema anterior y tenemos:

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{17} + 4)$$

Ocasionalmente se expresa la longitud de una curva C por la ecuación:

$$L = \int_A^B ds = \int_{A(a,c)}^{B(b,d)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

La formula anterior sugiere que si la curva C tiene la representación paramétrica $x = G(t),\ \ y = H(t),\ \ t \in [t_1, t_2]$

Donde $a = G(t_1),\ b = G(t_2),\ \ c = H(t_1),\ d = H(t_2),\ entonces, como$ $dx = G^{'}(t)dt\ \ y\ \ dy = H^{'}(t)dt,\ \ la\ longitud\ L\ de\ C\ se\ puede\ obtener\ por$:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[G^{'}(t)]^2 + [H^{'}(t)]^2}\,dt$$

La formula anterior se puede aplicar para cuando la ecuación de la curva está dada por una función vectorial, por lo que, la longitud de arco de curva entre dos puntos F(a) y F(b) viene dada por la fórmula:

$$L(F,a,b) = \int_a^b |F^{'}(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2 + z^{'}(t)^2}\,dt$$

3.6. Vector tangente, normal y binormal

VECTOR TANGENTE

Como ya lo vimos anteriormente, al vector $\vec{F}'(t)$ también se le llama vector tangente a la curva $\vec{F}(t)$ en t,

$$\vec{F}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

y el vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{F}'(t)}{|\vec{F}'(t)|}, \quad es\ el\ vector\ tangente\ unitario$$

VECTOR NORMAL

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \frac{[F'(t) \times F''(t)] \times F'(t)}{|[F'(t) \times F''(t)] \times F'(t)|}$$

VECTOR BINORMAL

$$\vec{B} = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \frac{F'(t) \times F''(t)}{|F'(t) \times F''(t)|}$$

Estos tres vectores son unitarios y perpendiculares entre sí, juntos forman un sistema de referencia móvil conocido como Triedro de Frénet-Serret.

3.7. Curvatura

Dada una curva regular F(t) se puede reparametrizar, de manera que la longitud de la curva entre dos puntos a y b coincida con la longitud del intervalo con origen en a y extremo en b; en este caso se dice que la curva está parametrizada por la longitud de arco, que llamamos s. En este caso el vector tangente siempre es unitario. Se define la curvatura k como la variación del vector tangente respecto a la longitud de arco.

$$k = \left\|\frac{dT}{ds}\right\|$$

La curvatura viene a medir como se “tuerce” la curva respecto de su longitud. Esta definición es bastante intuitiva, pero no es fácil de calcular. Para curvas, no necesariamente parametrizadas por el arco, se puede calcular como

$$k = \left\|\frac{T'(t)}{F'(t)}\right\|; \quad o\ bien$$

$$k = \frac{\|F'(t) \times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3}$$

Si la curva está en el espacio, también se “retuerce” y para medir esto de define a la torsión T como

$$T = \frac{\det(F'(t), F''(t), F'''(t))}{\|F'(t) \times F''(t)\|}$$

3.8. Aplicaciones

EN ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Para determinar completamente una función vectorial necesitamos calcular tanto su rotacional como su divergencia, además de las condiciones de contorno. Por ello las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo (*ecuaciones de Maxwell*) se expresan en términos de la divergencia y el rotacional de los campos eléctrico y magnético.

Empezaremos calculando la divergencia del campo magnético a través de la *ley de* Biot-*Savart*:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\left(\vec{J}\times\vec{r}\right)}{r^3}\cdot dv\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \vec{\nabla}\left(\frac{\left(\vec{J}\times\vec{r}\right)}{r^3}\right)\cdot dv$$

El integrando de esta ecuación puede descomponerse según las reglas del cálculo vectorial en la forma:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\left(\vec{J}\times\vec{r}\right)}{r^3}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{J}\right) - \vec{J}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

donde los dos términos dan un resultado nulo. Por lo tanto se obtiene:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

que constituye una de las leyes generales del Electromagnetismo que establece que *el campo de inducción magnética es solenoidal, es decir tiene divergencia nula en todos los puntos.*

Esto significa dicho campo no tiene ni fuentes ni sumideros y por tanto, como resaltaremos posteriormente, las líneas de fuerza del campo magnético siempre son cerradas. Los polos magnéticos, equivalentes en este caso a las cargas eléctricas, no existen independientemente; siempre que hay un polo Norte ha de aparecer un polo Sur.

Otra de las implicaciones del carácter solenoidal del campo de inducción es la de que existe una función vectorial de la que deriva:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \quad \text{puesto que} \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$$

para cualquier vector **A**. Este vector así definido recibe el nombre de *potencial vector*, y su unidad en el S.I. es el Wb/m. Al igual de lo que ocurre en el caso del potencial electrostático V, el potencial vector no está unívocamente determinado puesto que si le añade cualquier magnitud vectorial de rotacional nulo se llega al mismo campo magnético B.

EN EL CÁLCULO DE MOVIMIENTO DE UNA PROYECTIL

Cuando se lanza un objeto en presencia solamente de un campo gravitatorio, como el de la tierra, se observa que dicho objeto se eleva, alcanza una determinada altura y cae. Las ecuaciones vectoriales que describen este tipo de movimientos son:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Este movimiento ocurre en un plano y para su estudio se puede descomponer en un movimiento en la dirección horizontal y otro en la dirección vertical.

En la dirección horizontal, el movimiento es uniforme con velocidad constante y las ecuaciones que lo describen son:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$v_x(t) = v_{0x} = cte$$

donde x_0 es la componente horizontal de la posición inicial y es la componente horizontal del vector velocidad inicial. 0*xxv*0

En la dirección vertical, el movimiento es uniformemente acelerado, donde la aceleración es debida al campo gravitatorio. Las ecuaciones que lo describen son:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_{0y} + at$$

donde y_0 es la componente vertical de la posición inicial, v_{0y} es la componente vertical de la velocidad inicial y es la componente vertical de la aceleración.